Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(1 , 1 , -1) ; B(0 , 1 , -1) ; C(3 , 2 , 1) et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$

0,5 1) Montrer que le centre de (S) est le point $\Omega(1, 0, 1)$ et que son rayon est $R = \sqrt{3}$

1 2) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ et vérifier que : $x - z - 2 = 0$ est une équation du plan (ABC)

0,75 b) Vérifier que : $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ et montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = 1$

3) Soit (D) la droite passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

0,25 a) Montrer que : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ est représentation paramétrique de la droite (D)

0,25 b) Montrer que le triplet de coordonnées du point d'intersection H de la droite (D) et le plan (ABC) est (2 , 0 , 0)

0,25 c) En déduire le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 (3 points) :

0,75 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 12z + 61 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les points A , B et C d'affixes respectives $a = 6 - 5i$, $b = 4 - 2i$ et $c = 2 + i$

0,5 a) Calculer $\frac{a-c}{b-c}$. et en déduire que les points A , B et C sont alignés

0,75 b) On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 5i$
Vérifier que l'affixe de l'image D du point C par la translation T est $d = 3 + 6i$

0,5 c) Montrer que : $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est une argument de $-1 + i$

0,5 d) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$

Exercice 3 (3 points) :

Un sac contient 8 jetons : un jeton portant le nombre 0, cinq jetons portant le nombre 1, deux jetons portant le nombre 2 (indiscernables au toucher). On tire au hasard et simultanément 3 jetons de ce sac et on considère les événements suivants : A : « Obtenir 3 jetons portant des nombres deux à deux différents »
B : « La somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 5 »
C : « La somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 4 »

3 Montrer que : $p(A) = \frac{5}{28}$, $p(B) = \frac{5}{56}$ et $p(C) = \frac{3}{8}$

Exercice 4 (3 points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 11 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$

0,25 1) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$

0,5 2) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n < 12$

0,5 b) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante

0,25 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente

3) On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 12$

0,75 a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, puis écrire v_n en fonction de n

0,75 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 (8 points) :

I. On considère la fonction g définie sur $]0+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2\ln(x)$

0,75 1) Montrer que l'expression $x^2 - 1 \quad et \quad 2x^2\ln(x)$ sont de même signe sur $]0\,,1]$ et en déduire que : $\forall x \in]0\,,1] \quad , \quad g(x) \leq 0$

0,75 2) Montrer que l'expression $x^2 - 1 \quad et \quad 2x^2\ln(x)$ sont de même signe sur $[1,+\infty[$ et en déduire que : $\forall x \in [1,+\infty[\quad , \quad g(x) \geq 0$

II. On considère la fonction f définie sur $]0+\infty[$ par : $f(x) = (x^2-1)\ln(x)$ et on désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 3 cm

0,5 1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter graphiquement le résultat

1 b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et monter que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (remarque que $f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln(x)$) et en déduire que (C_f) admet une branche parabolique en $+\infty$ dont on précisera la direction

1,25 2) a) Montrer que : $\forall x \in]0+\infty[\quad , \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$

0,5 b) En déduire que f est croissante sur $]0\,,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$

0,5 c) Donner le tableau de variations de f sur $]0+\infty[$ et montrer que : $\forall x \in]0+\infty[\quad , \quad f(x) \geq 0$

1 3) Tracer la courbe (C_f)

0,5 4) a) Montrer que : $H : x \mapsto \frac{x^3}{x} - x$ est une primitive de $h : x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$

1 b) En intégrant par parties, montrer que : $\int_1^2 (x^2-1)\ln(x)\,dx = \frac{2}{9}(1+3\ln(2))$

0,25 c) Calculer, en cm², l'aire de la partie limitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations : $x = 0 \quad et \quad x = 2$